

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 1 martie 2008

Filiera tehnologică : profil tehnic

CLASA A XI-A

I. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $C(A) = \{X \in M_3(\mathbb{C}) \mid A \cdot X = X \cdot A\}$.

a) Să se arate că matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii $C(A)$.

b) Dacă matricea X aparține mulțimii $C(A)$, atunci X este de forma $\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 3c & 0 & a \end{pmatrix}$.

c) Dacă matricea Y aparține mulțimii $C(A)$ și $Y^2 = O_3$, atunci $Y = O_3$.

II. Într-un sistem de axe de coordonate se consideră punctele $A(1,2)$, $B(5,-2)$, $C(c,0)$; $c \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine ecuația dreptei AB .

b) Să se găsească poziția punctului C astfel încât $AC+BC=\min$.

c) Dacă D este simetricul punctului C găsit anterior față de originea sistemului de axe să se afle aria triunghiului DAB .

III. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{[x]}{x}$.

a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

b) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$.

c) Cercetați existența limitei funcției f în punctul $x_0 = 1$.

IV. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f continuă pe \mathbb{R} , $f(0) = 0$ și $f(2x) = f(x)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.

a) Să se demonstreze că $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se determine toate funcțiile ce verifică condiția dată.

Nota: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7